Διαφορικές Εξισώσεις 9/01/17

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ Επίλυση με δυναμοσειρές

x_0 ομαλό σημείο $\iff$ i) $a_2(x_0) \neq 0$

ii) $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{a_0}{a_2}$ αναλ. στο x_0 $(R>0)$, $|x-x_0|<R$

τότε $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$

Τα παρακάτω παραδείγματα και παρατηρήσεις

Παράδειγμα

$E_0: (x^2-2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0$ | $y(1)=2$, $y'(1)=-1$ $(\Rightarrow x_0 = 1)$

Λύση

$a_2(x) = x^2-2x \Rightarrow a_2(1) = -1 \neq 0$

$$\frac{5(x-1)}{x^2-2x} = \frac{5(x-1)}{1-1+x^2-2x} = \frac{5(x-1)}{-1+(x-1)^2} = -\frac{5(x-1)}{1-(x-1)^2} = -5(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n \quad , |x-1|<$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (x-x_0)^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

Αντικαθιστώ στην (E_0)

$$(E_0): (x^2-2x)\sum_0^{\infty} c_n n(n-1)(x-1)^{n-2} + 5(x-1)\sum_0^{\infty} c_n n (x-1)^{n-1} + 3\sum_0^{\infty} c_n (x-1)^n = 0$$

$\Rightarrow [(x-1)^2 - 1] \ldots$

$$\Rightarrow \sum_0^{\infty} c_n n(n-1)(x-1)^n - \sum_0^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 5n(x-1)^n + \sum_0^{\infty} 3c_n(x-1)^n = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\sum_{-2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n$$

$\Rightarrow 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \ldots = 0$

$$-(n+2)(n+1)c_{n+2} + \underbrace{(n^2+4n+3)}_{(n+1)(n+3)}c_n = 0 \quad , n \geq 0$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n+1)(n+3)c_n \quad , n \geq 0$$

$$c_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}c_n \quad , n \geq 0 \qquad \text{ή} \qquad c_n = \frac{n+1}{n}c_{n-2} \quad , n \geq 2$$

i) $n = 2k$

$$C_{2k} = \frac{2k+1}{2k}C_{2(k-1)} \quad , k \geq 1 \qquad \underline{k=1} \quad C_2 = \tfrac{3}{2}C_0 \qquad k=2 \quad C_4 = \tfrac{5}{4}C_2$$

$\underline{k=n}$ άθροισμα των όρων

$$C_{2n} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2n)} C_0 = \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n \cdot n!} C_0$$

ii) $n = 2k+1$

$$C_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+1}C_{2k-1} \quad , k \geq 1$$

$$C_{2n+1} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} C_1$$

Από αρχικές συνθήκες $C_1 = -1$, $C_0 = 2$

$$y(x) = \sum_0^\infty \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n \cdot n!}(x-1)^{2n} - \sum_0^\infty \text{———} (x-1)^{2n+1} \quad , x \in (0,2)$$

$$|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad , x_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2(x) = 1+x^2 \Rightarrow a_2(0) = 1 \neq 0 \\ \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} = \dfrac{2x}{1+x^2} \; , \; \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)} = \dfrac{-2}{1+x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ ομαλό σημείο}$$

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \dots \qquad = 0$$

$$\Rightarrow 2\cdot 1 c_2 + 3\cdot 2 c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2n c_n x^n - 2c_0 - 2c_1 x$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{c_1 : \text{αυθαίρετο}}$ $\boxed{c_0 = c_2}$ $\boxed{c_3 = 0}$ $\qquad \boxed{c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}c_n \ , \ n\geq 0}$ Θ.τ.δ τώρα

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} x^n\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + n(n+1)c_n + 2nc_n - 2c_n\right] = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)c_{n+2} + [n(n-1) + 2n - 2]c_n = 0 \ , \ \forall n \geq 2$$

Αφού $c_3 = 0 \Rightarrow (\forall n \geq 1)\ c_{2n+1} = 0$

$y_1(x) = x$

Τη δεύτερη λύση θα μπορούσα να τη βρω με υποβιβασμό τάξης

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (E_0)$

x_0 ανώμαλο σημείο αν $a_2(x_0) = 0$ ή κάποια από τις $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}$ δεν είναι αναλυτικές.

μη κανονικό — κανονικό

$$\left.\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{a_1}{a_2}(x-x_0) \\ A_2(x) &= \frac{a_0}{a_2}(x-x_0)^2 \end{aligned}\right\} \text{αναλυτικές στο } x_0 \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} a_2(x)A_1(x) &= a_1(x-x_0) \\ a_2(x)A_2(x) &= a_0(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

Παραδείγματα

1) $(x-2)y'' + \sin 2x\, y' + (x^2+1)y = 0$

$x \neq 2$ ομαλά , $x=2$ ανώμαλο

$\frac{\sin 2x}{x-2}(x-2) = \sin 2x$ αναλ. στο $x_0 = 2$

$\frac{x^2+1}{x-2}(x-2)^2 = (x-2)(x^2+1)$ αναλ. στο $x_0=2$

2) $y'' + |x|y + \sqrt[3]{x+1}\, y = 0$, $x \geq -1$

$x \neq -1, 0$ ομαλά

$x = -1, 0$ ανώμαλα

$\frac{|x|}{1} x = x|x| = \begin{cases} x^2, & x>0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$ όχι αναλ. στο 0 => μη κανον.

$\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1} x^2 = x^2\sqrt[3]{x+1}$, όχι αναλ. στο -1 => μη κανον.

3) $(x^4 - x^2)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$ $x \neq 0, \pm 1$ ομαλά

$x^2(x^2-1) = a_2(x)$

<u>$x=0$</u>

$x\frac{a_1}{a_2}(x) = \frac{2x+1}{x^2(x^2-1)}x = \frac{2x+1}{x(x^2-1)}$ μη κανονικό ανωμ. δεν ορίζεται η $A_1(x)$

<u>$x_0 = 1$</u>

$\frac{a_1}{a_2}(x-1) = \frac{2x+1}{x^2(x-1)(x+1)}(x-1) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$ αναλυτική στο $x_0=1$

ομοίως για την $A_2(x)$,άρα $x_0=1$ κανονικό ανώμαλο

και το $x_0=-1$ κανονικό ανώμαλο

Θεώρημα

Ας είναι $x_0 \in I$ κανον. ανώμαλο σημείο της (Ε): $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ και

$$A_1(x) = \frac{a_1}{a_2}(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R_1$$

$$A_2(x) = \frac{a_0}{a_2}(x-x_0)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R_2$$

Ας είναι $R = \min\{R_1, R_2\}$ και λ_1, λ_2 οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης

$$p(x) = \lambda^2 + (p_0 - 1) + q_0 = 0 \qquad Re\lambda_2 \le Re\lambda_1$$

πραγματικό μέρος

τότε

(A) Μια λύση της (Ε) είναι της μορφής $y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \; 0 < |x-x_0| < R$

(B) Μια άλλη (γρ. ανεξ.) λύση της y_2 είναι:

i) $\underline{\lambda_1 = \lambda_2}$: $y_2(x) = y_1(x) \log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n (x-x_0)^n, \; (\ell_0 = \ell), \; 0 < |x-x_0| < R$

ii) $\underline{\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}}$: $y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n, \; d_0 = 1, \; 0 < |x-x_0| < R$